Repetitorium

der

Planimetrie

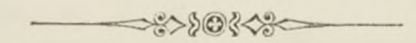
für

die Schüler der oberen Klassen des Königlichen Gymnasiums zu Cöslin

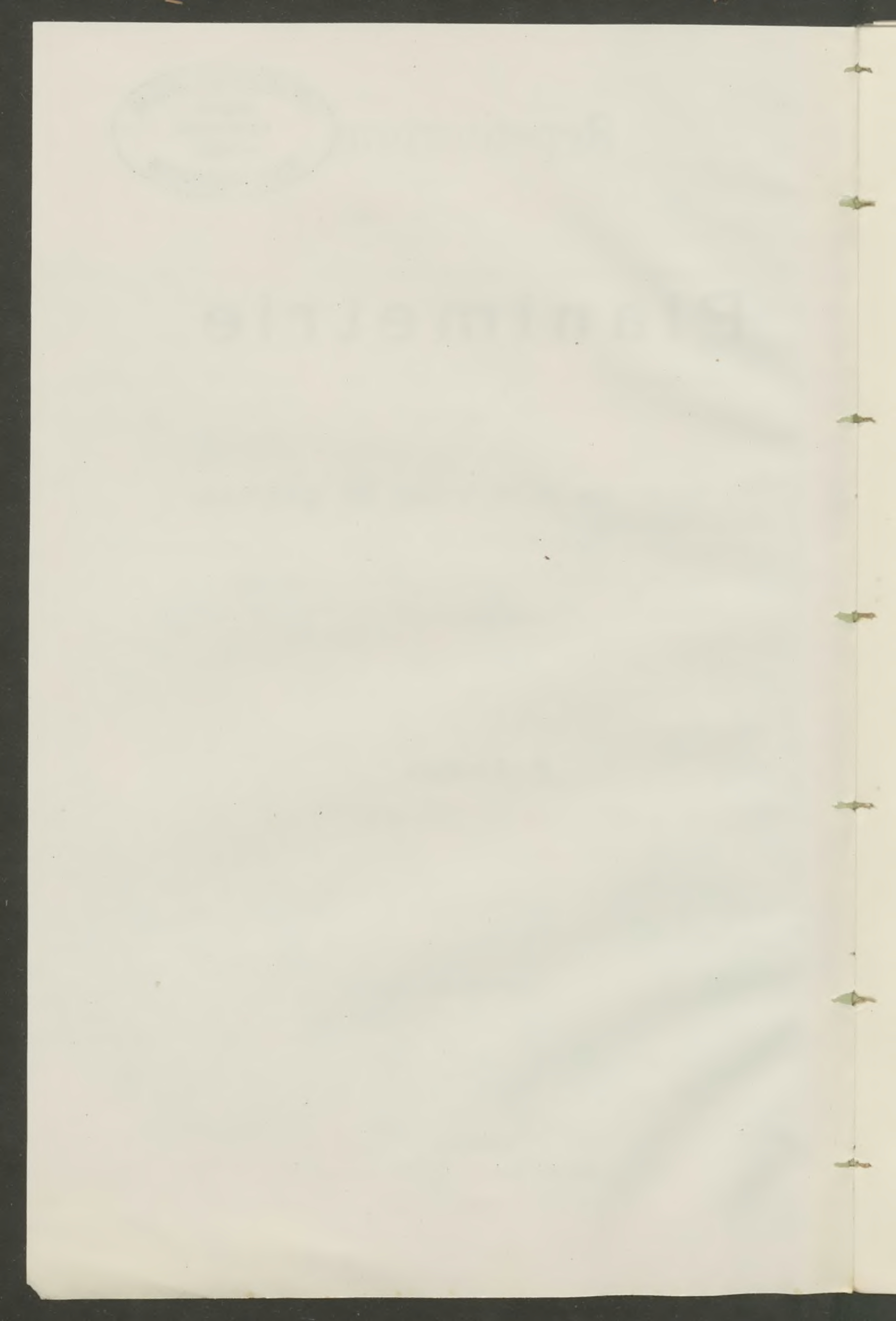
zusammengestellt

von

P. Lindner,
Oberlehrer.



Cöslin
Gedruckt bei C. G. Hendess
1888.



Bezeichnungen:

Punkt: A, B, P, X, Y.
Strecke: AB, XY, a, r.
Winkel: $\angle$ ABC, α, φ, $\angle$ (ah).
Dreieck: $\triangle$, $\triangle$ ABC, Seiten: BC = a, AC = b, AB = c.
Gegenwinkel der Seiten: α, β, γ; Höhe: CH = h, Mittellinie: CM = m, Winkelhalbierende: CW = w, Halbierende des Aussenwinkels: CW' = w', Höhenabschnitte: BH = p, AH = q; Abschnitte, von der Winkelhalbierenden auf c gebildet: BW = u, AW = v; BW' = u', AW' = v'.
Mittelpunkt des umschriebenen Kreises: U, sein Radius r.
Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises: O, sein Radius ϱ, seine Berührungspunkte auf a, b, c: A_1, B_1, C_1.
Mittelpunkte der angeschriebenen Kreise: O_a, O_b, O_c, ihre Radien ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c, ihre Berührungspunkte auf a, b, c für den Kreis um O_a: A_2, B_2, C_2; für den Kreis um O_b: A_3, B_3, C_3; für den Kreis um O_c: A_4, B_4, C_4. Schwerpunkt des Dreiecks: S.
Ist die Höhe, Mittellinie oder Winkelhalbierende nach a oder b gezogen, so bekommt die Strecke und ihr Endpunkt einen Index, z. B. $CH_a = p_a$.
Viereck: ABCD. Winkel nach den Eckpunkten α, β, γ, δ.
Seiten: AB = a, BC = b, CD = c, DA = d.
Diagonalen: AC = e, BD = f; ihr Schnittpunkt E.
Polygon: P, ABCD . . . . ; Winkel nach den Eckpunkten: α, β, γ, δ . . . .
Seiten: a, b, c, d . . . . .

Lehrgebäude.

Uebersicht:

A) Beziehungen der Lage und Grösse:

B) Metrische Beziehungen.

Beziehungen der Lage und Grösse.

Geometrie[1]) ist die Lehre von den räumlichen Gebilden.

Der Punkt hat keine Ausdehnung oder Dimension.

Die Linie hat eine Ausdehnung, nämlich in die Länge.

Die Fläche hat zwei Ausdehnungen, nämlich in die Länge und Breite.

Der Körper hat drei Ausdehnungen, nämlich in die Länge, Breite und Höhe.

Eine Linie heisst gerade, wenn sie in allen ihren Punkten dieselbe Richtung hat.

Krumme, gebrochene Linien.

Eine Fläche heisst eben, wenn sich durch jeden ihrer Punkte nach allen Richtungen gerade Linien ziehen lassen.

Planimetrie[2]) ist nun derjenige Teil der Geometrie, der sich mit den räumlichen Gebilden einer und derselben Ebene beschäftigt.

Von den geraden Linien und Winkeln.

1. *Erster planimetrischer Grundsatz.*

   Zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich.

   Folgerung.

   Zwei gerade Linien können sich nur in einem Punkte schneiden.

2. *Zweiter planimetrischer Grundsatz.*

   Zwischen zwei Punkten ist die gerade Linie der kürzeste Weg.

3. *Definition des Winkels.*

   Ein Winkel ist der Richtungsunterschied zweier einander schneidender Geraden.

   Verschwindender, spitzer, rechter, schiefer, stumpfer, konkaver[3]), gestreckter, konvexer[4]), voller Winkel.

4. *Satz von den gestreckten Winkeln.*

   Alle gestreckten Winkel sind einander gleich.

   Beweis: Durch Deckung.

---

[1]) *γῆ*, Erde; *μετρία*, Messung. [2]) planum, Ebene; *μετρία*, Messung. [3]) concavus, hohl. [4]) convexus, gewölbt.

5. *Satz von den rechten Winkeln.*

Alle rechten Winkel sind einander gleich.

Beweis: Sie sind die Hälften gleicher Ganzen.

6. *Satz von der errichteten Senkrechten.*

In einem Punkte einer Geraden ist nur eine einzige Senkrechte zu errichten möglich.

Beweis: indirekt[1]).

7a. *Definition von Nebenwinkeln.*

Wenn ASB eine gerade Linie ist, so heissen ASC und BSC Nebenwinkel.

7b. *Satz von den Nebenwinkeln.*

Wenn ASB eine gerade Linie ist, so ist $\angle$ ASC + $\angle$ BSC = 2R.

Beweis: Ihre Summe ist gleich einem gestreckten Winkel.

8. *Umkehrung.*[2])

Wenn $\angle$ ASC + $\angle$ BSC = 2R, so ist ASB eine gerade Linie.

Beweis: Indirekt. Durch den Hauptsatz ergiebt sich ein Widerspruch gegen einen Grundsatz.

9a. *Definition von Scheitelwinkeln.*

Wenn ASB und CSD gerade Linien, so heissen ASC und BSD Scheitelwinkel.

9b. *Satz von den Scheitelwinkeln.*

Wenn ASB und CSD gerade Linien, so ist $\angle$ ASC = $\angle$ BSD.

Beweis: Durch den Satz von den Nebenwinkeln.

10. *Umkehrung.*

Wenn CSD eine gerade Linie und $\angle$ ASC = $\angle$ BSD, so ist auch ASB eine gerade Linie.

Beweis: Indirekt. Durch den Hauptsatz ergiebt sich ein Widerspruch gegen einen Grundsatz.

---

[1]) Ein indirekter Beweis hat die Aufgabe, alle ausser der Behauptung denkbaren Annahmen als falsch zurückzuweisen. [2]) Einen Satz „umkehren“ heisst seine Voraussetzung mit der Behauptung ganz oder teilweise vertauschen.

Von den Parallelen.

11. Definition der Winkel an durchschnittenen Geraden.

Gegenwinkel, Wechselwinkel, entgegengesetzte Winkel.

12a. Definition der Parallelität[1]) *zweier Geraden.*

Zwei gerade Linien, die in einer Ebene so liegen, dass sie einander, soweit man sie auch verlängern mag, nie schneiden, heissen „parallel“.[1])

12b. Dritter planimetrischer Grundsatz. (11. Euklidisches Axiom).

Wenn zwei Parallelen von einer Geraden geschnitten werden, so sind *ein* Paar Gegenwinkel einander gleich.

12c. Satz von den geschnittenen Parallelen.

Wenn $AB \parallel A_1B_1$, so ist 1) $\beta = \beta_1$, 2) $\alpha = \delta_1$, 3) $\alpha + \gamma_1 = 2R$.

Beweis: Teil 1) folgt aus dem dritten planimetrischen Grundsatz. Teil 2) folgt aus Teil 1) und dem Satz von den Scheitelwinkeln. Teil 3) folgt aus dem Satz von den Nebenwinkeln und Teil 1) oder 2).

13. Umkehrung.

Wenn $\alpha = \alpha_1$, oder $\alpha = \gamma_1$, oder $\alpha + \delta_1 = 2R$, so ist $AB \parallel A_1B_1$.

Beweis: Teil 1) indirekt: Durch den Satz von den geschnittenen Parallelen entsteht ein Widerspruch gegen einen Grundsatz. Teil 2) durch Zurückführung auf Teil 1). Teil 3) durch Zurückführung auf Teil 1) oder 2).

14. Satz von einer Parallelen.

Durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden ist nur eine Parallele zu derselben möglich.

Beweis: indirekt.

15. Satz von den drei Parallelen.

Wenn $a \parallel b$ und $b \parallel c$, so ist $a \parallel c$.

Beweis: Denke eine Gerade gezogen, die a, b, c schneidet; dann ergiebt sich die Behauptung aus dem Satz von den geschnittenen Parallelen und seiner Umkehrung.

---

1) παράλληλος, neben einander herlaufend.

16. *Specielle Fälle des Satzes von den geschnittenen Parallelen.*

Wenn $a \perp c$ und $a \parallel b$, so ist $b \perp c$.

Wenn $a \perp c$ und $b \perp c$, so ist $a \parallel b$.

Beweis: Durch den Satz von den geschnittenen Parallelen oder seine Umkehrung.

17. *Satz von den Winkeln mit parallelen Schenkeln.*

Wenn $a \parallel c$ und $b \parallel d$, so ist entweder $\angle (ab) = \angle (cd)$ oder $\angle (ab) + \angle (cd) = 2R$.

Beweis: Durch Verlängerung eines Schenkels vermittelst des Satzes von den geschnittenen Parallelen.

18. *Satz von der Konvergenz.*[1])

Wenn $\angle \alpha + \beta < 2R$, so konvergieren a und b nach links.

Beweis: Durch eine Parallele.

Von den ebenen Figuren.

Ein allseitig begrenzter Teil der Ebene heisst eine ebene Figur. Geradlinige, krummlinige, gemischtlinige Figuren. Dreieck, Viereck, Fünfeck etc. nEck oder Polygon.[2]) Gleichschenkliges, gleichseitiges, rechtwinkliges, spitzwinkliges, stumpfwinkliges Dreieck.

Im gleichschenkligen Dreieck: Basis,[3]) Schenkel, Basiswinkel, Winkel an der Spitze.

Im rechtwinkligen Dreieck: Hypotenuse,[4]), Katheten[5]).

19a. *Satz von der Summe zweier Dreiecksseiten.*

Im Dreieck ist $a + b > c$.

Beweis: Durch den zweiten planimetrischen Grundsatz.

19b. *Satz von der Differenz zweier Dreiecksseiten.*

Im Dreieck ist $a - b < c$.

Beweis: Durch den Satz von der Summe zweier Dreicksseiten und durch passende Subtraktion.

---

[1]) con, zusammen; vergere, sich neigen. [2]) *πολύς*, viel; *γωνία*. Winkel, Ecke. [3]) *βάσις*, Grundlage. [4]) *ὑποτείνουσα*, unterspannend. [5]) *κάθετος*, herabgeschickt.

20. *Satz von der Summe der Dreieckswinkel.*

Im Dreieck ist $\alpha + \beta + \gamma = 2R$.

Beweis: Ziehe durch C zu c eine Parallele,dann folgt die Behauptung aus dem Satz von den Wechselwinkeln.

21. *Satz vom Aussenwinkel des Dreiecks.*

Im Dreieck ist $2\,R - \gamma = \alpha + \beta$.

Beweis: Durch den Satz über die Summe der Winkel im Dreieck.

22. *Satz vom Punkt innerhalb eines Dreiecks.*

Wenn Y innerhalb des Dreiecks liegt, so ist 1) $a_1 + b_1 < a + b$, 2) $\gamma_1 > \gamma$.

Beweis: Verlängere AY über Y hinaus bis D auf BC. Dann ist $AC + CD > AD$, also $AC + CB > AD + DB$. Die hierdurch erwiesene Wahrheit auf $\triangle$ ADB übertragen ergiebt $AD + DB > AY + YB$, also sicher $AC + CB > AY + YB$. Teil II folgt durch den Satz vom Aussenwinkel.

23a. *Definition der Kongruenz*[1] *von Dreiecken.*

$\triangle \cong \triangle_1$, wenn $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$, $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$ ist.

23b. *Erster Kongruenzsatz.*

Wenn in zwei Dreiecken $a = a_1$, $b = b_1$, $\gamma = \gamma_1$, so ist $\triangle \cong \triangle_1$.

Beweis: Durch Aufeinanderlegen.

23c. *Zweiter Kongruenzsatz.*

Wenn in zwei Dreicken $\alpha = \alpha_1$, $c = c_1$, und entweder $\beta = \beta_1$, oder $\gamma = \gamma_1$, so ist $\triangle \cong \triangle_1$.

Beweis: Die Bedingung $\alpha = \alpha_1$ und $\gamma = \gamma_1$, zieht auch die Bedingung $\beta = \beta_1$ nach sich, und nunmehr folgt die Kongruenz durch Aufeinanderlegen.

24a. *Satz von den Basiswinkeln.*

Wenn im Dreieck $a = b$, so ist $\alpha = \beta$.

Beweis: Denkt man γ durch CW halbiert, so folgt die Behauptung aus dem ersten Kongruenzsatz durch Umkehrung der Definition[2] von Kongruenz zweier Dreiecke.

---

[1] congruere, übereinstimmen. [2] Jede Definition ist ohne weiteres umkehrbar.

24b. Umkehrung.

Wenn im Dreieck $\alpha = \beta$, so ist $a = b$.

Beweis: Durch den zweiten Kongruenzsatz.

25. Beziehung zwischen Seiten und Gegenwinkeln.

Wenn im Dreieck $a > b$, so ist $\alpha > \beta$.

Beweis: Durch Abtragen der kleineren Seite auf der grösseren und durch Anwendung der Sätze von den Basiswinkeln im gleichschenkligen Dreieck.

26. Beziehung zwischen Winkeln und Gegenseiten.

Wenn im Dreieck $\alpha > \beta$, so ist $a > b$.

Beweis: indirekt, durch den Hauptsatz und die Umkehrung des Satzes von den Basiswinkeln.

27a. Dritter Kongruenzsatz.

Wenn in zwei Dreiecken $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$, so ist $\triangle \cong \triangle_1$.

Beweis: Man denke sich die Dreiecke mit den grössten Seiten aneinandergelegt und die Spitzen verbunden, dann folgt die Gleichheit eines Winkelpaares aus dem Satz von den Basiswinkeln im gleichschenkligen Dreieck.

27b. Vierter Kongruenzsatz.

Wenn in zwei Dreiecken $c = c_1$, $\gamma = \gamma_1$, $b = b_1$, $c > c_1$, so ist $\triangle \cong \triangle_1$.

Beweis: Man denke sich die Dreiecke mit den grösseren Seiten c aneinandergelegt und ihre Spitzen verbunden. Die Verbindungslinie muss dann die Seite c zwischen A und B schneiden, nicht in einem Endpunkte. Nunmehr folgt durch Anwendung des Satzes über die Basiswinkel und seine Umkehrung die Kongruenz nach dem dritten Kongruenzsatz.

28. Sätze über das gleichschenklige Dreieck.

Wenn im Dreieck $a = b$, so

1) $u = v$; $w \perp c$. 2) $p = q$; $\angle(ah) = \angle(bh)$.
3) $m \perp c$; $\angle(am) = \angle(bm)$. 4) geht die Mittelsenkrechte von c durch C und halbiert γ.

Beweis: Für 1, 2, 3 durch Kongruenz der Teildreiecke, für 4) durch 1) vermittelst des Satzes von der errichteten Senkrechten.

29. Satz von der Mittelsenkrechten.

Wenn AM = BM und XM $\perp$ AB, so ist

1) AX = BX für jeden beliebigen Punkt X auf der Senkrechten,
2) AY $\gtrless$ BY für jeden Punkt Y ausserhalb der Senkrechten.

Beweis: 1) durch Kongruenz der Dreiecke AMX u. BMX,
2) durch Teil 1) mit Zuhilfenahme des Satzes über die Summe zweier Seiten.

Definition des Begriffs „geometrischer Ort."

Eine Linie ist geometrischer Ort für einen Punkt, der gewissen Bedingungen unterworfen ist, wenn 1. jeder Punkt der Linie den gestellten Anforderungen genügt; 2. kein Punkt ausserhalb dieser Linie den an den Punkt gestellten Anforderungen gerecht wird.

30. Satz von den beiden gleichschenkligen Dreiecken über gemeinsamer Basis.

Wenn AC = BC und AD = BD ist, so ist

1) $\angle$ ACD = $\angle$ BCD
2) AM = BM
3) CM $\perp$ AB.

Beweis: 1) durch Kongruenz der Dreiecke ACD u. BCD,
2) u. 3) durch Kongruenz der Dreiecke AMC und BMC.

31. Satz von der gefällten Senkrechten.

Wenn CF $\perp$ MN und AF > BF, so ist

1) CF die einzige Senkrechte von C auf MN
2) CF > CD
3) CA > CB.

Beweis: 1) indirekt durch den Satz von der Summe der Winkel eines Dreiecks.
2) durch die Beziehung zwischen Winkeln und Seiten eines Dreiecks.
3) $\angle$ CBA ist stumpf nach dem Satz vom Aussenwinkel, also CA > CB wegen der Beziehung zwischen Winkeln und Gegenseiten eines Dreiecks.

32. Satz von der Inkongruenz.

Wenn in zwei Dreiecken $a = a_1$, $b = b_1$, $\gamma > \gamma_1$, so ist $c > c_1$.

Beweis: Da $\gamma > \gamma_1$, so muss einer der Winkel α_1 und β_1 grösser als der entsprechende Winkel im andern Dreieck sein, etwa $\alpha_1 > \alpha$. Legt man dann $\triangle_1$ auf $\triangle$ mit b_1 auf b, so muss $\triangle_1$ in die Lage von $\triangle_2$ fallen. Dann folgt die Behauptung aus dem Satz über die Summe der Seiten im Dreieck.

33. Umkehrung.

Wenn in zwei Dreiecken $a = a_1$, $b = b_1$, $c > c_1$, so ist $\gamma > \gamma_1$.

Beweis: indirekt durch den Hauptsatz und den ersten Kongruenzsatz.

Von den Vierecken und Polygonen.

Ein Viereck heisst:

Trapez[1]), wenn $a \parallel c$,
Parallelogramm[2]), wenn $a \parallel c$, $b \parallel d$,
Antiparallelogramm[3]), wenn $a \parallel c$, $\alpha = \beta$,
Deltoid[4]), wenn $a = b$, $c = d$;

Ein Parallelogramm heisst:

Rechteck, wenn $\alpha = R$,
Rhombus,[5]) wenn $a = b$,
Quadrat,[6]) wenn $\alpha = R$ und $a = b$.

34. Definition der Kongruenz von Polygonen.

$P \cong P_1$, wenn $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$ etc.
$\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$ etc.

35. Satz vom Viereck.

Im Viereck ist $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4R$.

Beweis durch Ziehen einer Diagonale[7]) und Anwendung des Satzes von der Summe der Dreieckswinkel.

---

[1]) *τράπεζα* Tisch. [2]) *παράλληλος* nebeneinanderher laufend; *γράμμα* Zeichen, Figur. [3]) *ἀντί* gegen. [4]) *Δ*, griechischer Buchstabe. [5]) *ῥόμβος*, Raute. [6]) quadrare, viereckig machen. [7]) *διαγώνιος*, durch die Ecken gehend.

36a. Satz von den Gegen-Seiten und -Winkeln des Parallelogramms.

Wenn a ∥ c, b ∥ d, so ist 1) a = c, b = d; 2) $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$.

Beweis durch Ziehen einer Diagonale.

Umkehrungen.

36b) Wenn a = c, b = d, so ist a ∥ c, b ∥ d.

36c) Wenn a ⌗ c, so ist b ⌗ d.

36d) Wenn $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, so ist a ∥ c, b ∥ d.

b) und c) werden bewiesen durch Ziehen einer Diaonale, d) durch Anwendung des Satzes vom Viereck.

37a. Satz von den Diagonalen des Parallelogramms.

Wenn a ∥ c, b ∥ d, so ist AE = CE = $\frac{1}{2}$e; BE = DE = $\frac{1}{2}$f.

Beweis: Durch Kongruenz von △ AEB und △ CED.

37b. Umkehrung.

Wenn AE = CE, BE = ED, so ist a ∥ c, b ∥ d.

Beweis folgt aus der Kongruenz von △ AEB und △ CED.

38. Satz vom Rhombus.

Wenn a ∥ c, b ∥ d, a = b, so ist e ⊥ f, und ∠ (ae) = ∠ (de) = $\frac{1}{2}\alpha$; ∠ (af) = ∠ (bf) = $\frac{1}{2}\beta$.

Beweis durch den Satz von den beiden gleichschenkligen Dreiecken über gemeinsamer Basis.

39. Satz vom Rechteck.

Wenn a ∥ c, b ∥ d, α = R, so ist e = f.

Beweis durch Kongruenz der Dreiecke ABC und ABD.

40. Satz vom n-Eck.

Im n-Eck ist $\alpha + \beta + \gamma + \delta \;....\; \nu = (2n - 4)$ R.

Beweis durch Verbindung eines Punktes innerhalb des Polygons mit den Eckpunkten und Anwendung des Satzes von der Summe der Dreieckswinkel.

Der Kreis.

Definition: Der Kreis ist eine in einer Ebene liegende krumme Linie, deren Punkte von einem Punkte gleich weit entfernt sind. Mittelpunkt, Peripherie[1]), Kreisfläche, Radius[2]), Durchmesser, Sehne, Sekante[3]), Tangente, Centriwinkel, Peripheriewinkel, Sektor[4]), Segment[5]), Quadrant[6]), Halbkreis.

41. Sätze von der Sehne:

a) Wenn $AM = BM$, so ist $MC \perp AB$.

b) Wenn $MC \perp AB$, so ist $AM = BM$.

c) Wenn s Mittelsenkrechte zu AB ist, so geht s durch C.

Beweis: Verbindet man A und B mit C, so ergeben sich die drei Behauptungen aus den Sätzen über das gleichschenklige Dreieck.

42a. Satz von den gleichen Sehnen:

Wenn $AB = A_1B_1$, $CM \perp AB$, $CM_1 \perp A_1B_1$, so ist $CM = CM_1$.

Beweis: Verbindet man C mit A und A_1, so folgt die Behauptung aus der Kongruenz der Dreiecke ACM und A_1CM_1.

42b. Umkehrung.

Wenn $CM \perp AB$, $CM_1 \perp A_1B_1$, $CM = CM_1$, so ist $AB = A_1B_1$.

Beweis: Durch Kongruenz der Dreieke ACM und A_1CM_1 ergiebt sich, dass $AM = A_1M_1$ und also auch $AB = A_1B_1$.

43a. Satz von den ungleichen Sehnen.

Wenn $AB > A_1B_1$, $CM \perp AB$, $CM_1 \perp A_1B_1$, so ist $CM < CM_1$.

Beweis: Schlage um B mit A_1B_1 einen Kreis, welcher die Peripherie in A_2 schneidet, und fälle CM_2 senkrecht A_2B, dann ist $CM_2 > CM_1$ wegen der Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln eines Dreiecks.

---

1) περί herum, φέρειν tragen. 2) radius, Strahl. 3) secare, schneiden. 4) sector, Ausschnitt. 5) segmentum, Abschnitt. 6) quadrare, viereckig machen.

Dass $CM_1 > CM$, folgt dann aus dem Satz über gleiche Sehnen.

43b. Umkehrung.

Wenn $CM \perp AB$, $CM_1 \perp A_1B_1$, $CM < CM_1$, so ist $AB > A_1B_1$.

Beweis: indirekt.

Definition der Tangente: Eine Gerade, welche, so weit man sie auch verlängern mag, einen Kreis nur in einem Punkte trifft, heisst Tangente desselben.

44. Sätze von der Tangente.

a) Wenn B ein Punkt der Peripherie des Kreises um C und $AB \perp BC$, so ist AB Tangente.

b) Wenn AB Tangente in B, so ist $BC \perp AB$.

c) Wenn AB Tangente in B und $s \perp AB$, so geht s durch C.

Beweis: a) durch den Satz von der gefällten Senkrechten, b) und c) indirekt.

45. Satz von den beiden Tangenten.

Wenn PA und PB Tangenten in A und B, so ist $PA = PB$ und $\angle CPA = \angle CPB$.

Beweis: Durch Kongruenz der Dreiecke CAP und CBP.

46. Satz vom Centri- und Peripheriewinkel.

Wenn A, B, P Punkte der Peripherie, so ist $\angle ACB = 2 \angle APB$.

Beweis: Ziehe durch P den Durchmesser PCD, dann ist $\gamma_1 = 2\varphi_1$, $\gamma_2 = 2\varphi_2$ und durch Addition oder Subtraktion $\gamma = 2\varphi$.

Anmerkung: Natürlich kann γ_1 und φ_1 auch verschwinden.

Folgerung: Wenn AB Durchmesser, so ist $\varphi = R$.

47. Satz von den Peripheriewinkeln über demselben Bogen.

Wenn P und P_1 auf der Peripherie liegen, so ist $\angle APB = AP_1B$.

Beweis: Verbindet man C mit A und B, so sind beide Peripheriewinkel gleich $\frac{1}{2}\gamma$, folglich einander gleich.

48. *Satz vom Tangenten-Sehnen-Winkel.*

Wenn AB Sehne, BC Tangente in B, P und P_1 Punkte der Peripherie sind, so ist $\angle ABC = APB = 2R - AP_1B$.

Beweis: Zieht man durch B den Durchmesser BP_2 und verbindet P_2 mit A, dann ist $\angle \beta = \varphi_2$. Nun folgt die erste Behauptung aus dem Satze von den Peripheriewinkeln über demselben Bogen. Die zweite Behauptung wird durch Verbindung von P_1 mit P_2 bewiesen.

49. *Satz von den gleichen Centriwinkeln.*

Zu gleichen Centriwinkeln eines Kreises gehören gleiche Sehnen, gleiche Bogen, gleiche Kreisaus- und Kreisabschnitte.

Beweis: Durch Aufeinanderlegen.

50. *Satz von den drei Mittelsenkrechten des Dreiecks.*

Wenn M_a, M_b, M_c die Mitten von a, b, c, wenn ferner $M_a U \perp a$, $M_b U \perp b$, so ist: 1) $AU = BU = CU$ und 2) $UM_c \perp c$, 3) U ist Mittelpunkt des „Umkreises."

Beweis: 1) folgt aus dem Satz von der Mittelsenkrechten und 2) dann durch einen Satz über das gleichschenklige Dreieck. 3) Ein Kreis mit AU um U geschlagen muss durch A, B, C gehen.

51. *Satz von den drei Winkelhalbierenden des Dreiecks.*

Wenn α durch AO, β durch BO halbiert wird und $OA_1 \perp a$, $OB_1 \perp b$, $OB_1 \perp c$, so ist 1) $OA_1 = OB_1 = OC_1$ 2) γ wird durch OC halbiert. 3) O ist Mittelpunkt des „Inkreises."

Beweis: Durch Kongruenz der an A und B liegenden Teildreiecke folgt die erste Behauptung und dann die zweite durch Kongruenz der an C liegenden Teildreiecke. Endlich muss ein mit OA, um O geschlagener Kreis durch A_1, B_1, C_1 gehen und die drei Seiten berühren, nach dem ersten Satz von der Tangente.

52. *Satz vom Sehnenviereck.*

Im Sehnenviereck ist $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 2$ R.

Beweis: Durch den Satz von der Summe der Winkel im Dreieck, verbunden mit dem Satze von den Peripheriewinkeln über gleichem Bogen.

53. Umkehrung.

Wenn $\alpha + \gamma = 2$ R, so geht ein durch B, C, D gelegter Kreis auch durch A.

Beweis: Indirekt; durch Anwendung des Hauptsatzes entsteht ein Widerspruch gegen den Satz vom Aussenwinkel.

54. Satz vom Tangentenviereck.

Im Tangentenviereck ist $a + c = b + d$.

Beweis: Durch wiederholte Anwendung des Satzes von den beiden Tangenten, und nachherige Addition.

55. Umkehrung.

Wenn im Viereck $a + c = b + d$, so berührt ein a, b, c berührender Kreis auch d.

Beweis: Indirekt. Durch Anwendung des Hauptsatzes gelangt man zu einem Widerspruch gegen den Satz von der Differenz zweier Seiten im Dreieck.

56a. Satz vom regulären Polygon.

Ist $a = b = c = d \ldots\ldots$ und $\alpha = \beta = \gamma = \delta \ldots\ldots$, wird ferner α von AK, β von BK halbiert, und ist endlich $KH_a \perp a$, $KH_b \perp b$, $KH_c \perp c$, ... so ist 1) $AK = BK = CK \ldots\ldots$ 2) $KH_a = KH_b = KH_c \ldots\ldots$

Beweis: $\triangle_a$ ist gleichschenklig und kongruent $\triangle_b$, daraus folgt, dass $\angle BCK = \frac{1}{2}\alpha$ also auch $\angle DCK = \frac{1}{2}\alpha$, folglich $\triangle_b \cong \triangle_c$ etc.; daraus ergiebt sich Teil 1) der Behauptung. Teil 2) der Behauptung folgt aus dem Satze von den gleichen Sehnen eines Kreises.

56b. Satz von den Winkeln des regulären Polygons.

Der Centriwinkel des regulären n-Ecks ist $\frac{4R}{n}$, der Polygonwinkel $2R - \frac{4R}{n}$.

Beweis: durch den Satz vom regulären Polygon.

57. Satz von zwei sich schneidenden Kreisen.

Wenn die Kreise um C und C_1 einander in A und B schneiden, so ist $CC_1 \perp AB$ und $AD = BD$.

Beweis: Durch den Satz von den beiden gleichschenkligen Dreiecken.

58. Satz von zwei einander berührenden Kreisen.

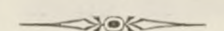
Wenn die Kreise um C und C_1 einander in B berühren, und AB $\perp$ BC, so ist CBC_1 eine gerade Linie und AB gemeinsame Tangente.

a) die Kreise berühren einander von aussen.

Beweis: Indirekt durch den zweiten planimetrischen Grundsatz.

b) die Kreise berühren einander von innen.

Beweis: Denkt man sich einen den äusseren Kreis in B berührenden Kreis mit dem Mittelpunkt C_2 construiert, so liegen die Punkte C, C_1, B, C_2 nach Teil 1) und nach dem ersten planimetrischen Grundsatz in einer Geraden, also sicher auch C, C_1, B.



Metrische Beziehungen.

Messen, Einheit, Masszahl, Vielfaches, Mass.
Ganze, gebrochene, irrationale Masszahlen.
Kommensurabilität, Inkommensurabilität.

Definition des Produkts zweier Strecken:

Sind a und b zwei Strecken, $|a|$[1] und $|b|$ ihre Masszahlen in Bezug auf die Längeneinheit e, so definieren wir $ab = |a| \cdot |b|$ qe[2]).

Bei dieser Definition gelten alle arithmetischen Sätze über Multiplikation zweier Zahlen auch für zwei Strecken; denn man braucht auf beiden Seiten der Formel über die zugehörigen Masszahlen nur die Quadrateinheit als Benennung hinzuzufügen, um an der Hand der obigen Definition die Richtigkeit der Formel für die Strecken zu erweisen. Infolgedessen gelten dann auch die Formeln über Division zweier Strecken.

Die gebräuchlichste Längeneinheit, das Meter, ist der zehnmillionste Teil des Meridianquadranten:

km, (Hm), (Dm), m, (dm), cm, mm.

qkm, qHm = ha, qDm = a, qm, (qdm), qcm, qmm.

Ueber den Flächeninhalt geradliniger Figuren.

Der Flächeninhalt einer Figur ist der von ihr eingeschlossene Teil der Ebene.

59. Der Inhalt des Rechtecks ist

$R = ab.$

Beweis. I. Fall der Kommensurabilität[3]):

1) die Einheit geht in a und b auf.
Es sei $a = ne$, $b = oe$; dann ist $R = no$ qe $= ab$.

2) Ein aliquoter Teil der Einheit geht in a und b auf.
Es sei $a = n\frac{e}{p}$, $b = o\frac{e}{p}$; dann ist nach 1)

$$R = no\ q\left(\frac{e}{p}\right) = \frac{no}{p^2}\ qe = \frac{n}{p}\ e \cdot \frac{o}{p} e = ab.$$

[1]) gelesen: Masszahl von a. [2]) gelesen: Quadrateinheit.
[3]) con, zusammen; mensurare, messen.

II. Fall der Inkommensurabilität:

1) Die Einheit ist mit a kommensurabel, mit b inkommensurabel. Angenommen $R \gtrless ab$, so muss es, da der Flächeninhalt eines Rechtecks durch Veränderung einer Seite um jede beliebige, noch so kleine Grösse geändert werden kann, ein anderes Rechteck vom Inhalt ab mit den Seiten a und BC_1 geben. Trägt man dann einen in a aufgehenden aliquoten Teil der Einheit, der kleiner ist, als CC_1 auf b von B aus ab, so muss mindestens ein Teilpunkt zwischen C und C_1 fallen, etwa in C_2. Dann ist das Rechteck $ABC_2D_2 = AB \cdot BC_2$ nach Fall I; nach Annahme aber ist $ABC_1D_1 = AB \cdot BC$.

Diese beiden Gleichungen widersprechen einander.

2) Die Einheit ist mit a und b inkommensurabel.

Dieser Fall wird ähnlich auf 1) zurückgeführt, wie dieser Fall auf den der Kommensurabilität.

60. Der Inhalt des Parallelogramms ist

$P = ah.$

Beweis durch den Satz vom Inhalt des Rechtecks.

61. Der Inhalt des Dreiecks ist

$\triangle = \frac{1}{2}ch.$

Beweis durch den Satz vom Inhalt des Parallelogramms.

62. Der Inhalt des Trapezes ist

$T = \frac{1}{2}(a + c) h.$

Beweis durch den Satz vom Inhalt des Dreiecks.

63. Der Inhalt des regulären n-seitigen Polygons ist

$P_n = \frac{1}{2} na\varrho.$

Beweis durch den Satz vom regulären Polygon in Verbindung mit dem Satz vom Inhalt des Dreiecks.

Ueber Aehnlichkeit geradliniger Figuren.

64. *Satz von der Parallelen im Dreieck.*

Wenn im Dreieck $A_1B_1 \parallel AB$, so ist $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a}{b}$

Beweis: Denkt man sich A mit B_1 und B mit A_1 verbunden, so ist $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{a_1}{a_2}$ und $\frac{\Delta_1}{\Delta_3} = \frac{b_1}{b_2}$; es ist aber $\Delta_2 = \Delta_3$, also $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$; durch correspondierende Addition folgt dann $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$.

65. *Umkehrung.*

Wenn im Dreieck $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ so ist $c_1 \parallel c$.

Beweis (indirekt). Durch den Parallelensatz ergiebt sich nach einer Umstellung ein Widerspruch.

66. *Satz von den beiden Parallelen im Dreieck.*

Wenn im Dreieck $A_1B_1 \parallel AB$ und $B_1A_2 \parallel AC$, so ist $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$; $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$; $\frac{a}{a_2} = \frac{b}{b_2} = \frac{c}{c_2}$.

Beweis: Durch Anwendung des Parallelensatzes und des Satzes von den Gegenseiten im Parallelogramm.

Definition der Ähnlichkeit von Polygonen.

Wenn in zwei Polygonen

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{und } \alpha = \alpha_1,\ \beta = \beta_1,\ \gamma = \gamma_1 \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{so ist} \\ P \sim P_1\end{array}$$

67. *Ähnlichkeitssätze.*

$\Delta \sim \Delta_1$, wenn

1) $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$ und $\gamma = \gamma_1$, oder 2) $\alpha = \alpha_1$ und $\gamma = \gamma_1$ oder

3) $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, oder 4) $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$, $\alpha = \alpha_1$, $a > b$.

Beweis: Trage b_1 auf b von C aus ab bis A_2, ziehe durch A_2 eine Parallele zu c bis B_2; dann ist das so abgeschnittene Dreieck $\Delta_2 \sim \Delta$; ferner ergiebt sich aus dieser Ähnlichkeit im Verein mit den Voraussetzungen, dass $\Delta_2 \cong \Delta_1$ also auch $\Delta_1 \sim \Delta$.

68a. Satz über ähnliche Dreiecke.

Wenn $\Delta \sim \Delta_1$, so ist $\frac{a}{a_1} = \frac{h}{h_1} = \frac{m}{m_1} = \frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1}$

Beweis: Durch Ähnlichkeit von Teildreiecken; der letzte Teil der Behauptung durch den Satz über fortlaufende Proportionen.

68b. Satz über die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke.

Wenn $\Delta \sim \Delta_1$, so ist $\frac{\Delta}{\Delta_1} = \frac{a^2}{a_1^{\,2}} = \frac{h^2}{h_1^{\,2}}$.

Beweis: Durch Division der Flächeninhalte der beiden Dreiecke und den Satz über ähnliche Dreiecke.

69a. Satz über ähnliche Polygone.

Wenn $P \sim P_1$, so ist $\Delta a \sim \Delta a_1$, $\Delta b \sim \Delta b_1$, $\Delta c \sim \Delta c_1 \ldots$.

Beweis: Die Ähnlichkeit von Δa und Δa_1 folgt aus der Voraussetzung; hieraus folgt die Gleichheit von φ und φ_1, und mit Hilfe der Voraussetzung auch die von ψ und ψ_1; ferner folgt aus der Ähnlichkeit von Δa und Δa_1, dass $\frac{b}{b_1} = \frac{f}{f_1}$, somit auch die Ähnlichkeit des zweiten Dreieckspaares, und so fort.

69b. Satz über die Flächeninhalte ähnlicher Polygone.

Wenn $P \sim P_1$, so ist $\frac{P}{P_1} = \frac{a^2}{a_1^{\,2}} = \frac{b^2}{b_1^{\,2}} = \ldots\ldots$

Beweis: Aus dem vorigen Satz folgt, wenn man die homologen Diagonalen zieht, die Ähnlichkeit der Teildreiecke. Da nun diese sich verhalten wie die Quadrate homologer Seiten, so ergiebt sich die fortlaufende Proportion $\frac{\Delta a}{\Delta a_1} = \frac{\Delta b}{\Delta b_1} = \frac{\Delta c}{\Delta c_1} \ldots$; durch korresspondierende Addition folgt

$$\frac{P}{P_1} = \frac{\Delta a}{\Delta a_1} = \frac{a^2}{a_1^{\,2}} = \frac{b^2}{b_1^{\,2}} = \ldots$$

Metrische Beziehungen am Dreieck.

70a. Satz von der Hypotenusenhöhe.

Wenn im Dreieck $\gamma = R$, so ist

1) $h^2 = pq$, 2) $a^2 = cp$ und $b^2 = cq$.

Beweis: 1) durch Ähnlichkeit von Δ_p und Δ_q 2) durch Ähnlichkeit eines der beiden Teildreiecke mit Δ.

70b. Satz des Pythagoras.

Wenn im Dreieck $\gamma = R$, so ist $a^2 + b^2 = c^2$.

Beweis: Durch den Satz von der Hypotenusenhöhe.

71. Umkehrung.

Wenn im Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$, so ist $\gamma = R$.

Beweis: Denke b auf a in C senkrecht errichtet, dann liefert der Pythagoras und die Voraussetzung: $c = c_1$.

72. Verallgemeinerung des Pythagoreischen[1]) Lehrsatzes.

Im Dreieck ist $a^2 = b^2 + c^2 - 2cq$.

Beweis: Durch Anwendung des Pythagoras auf ein Teildreieck folgt $a^2 = h^2 + p^2$. Drückt man nun h^2 aus dem andern Dreieck nach dem Pythagoras und p^2 nach der Formel über Quadrierung einer Differenz aus und setzt die gefundenen Werte ein, so ergiebt sich die Behauptung.

Bemerkung: Fällt H in die Verlängerung von c, so gilt der ganz auf der Verlängerung liegende Höhenabschnitt als negativ, der nur teilweise in die Verlängerung fallende Abschnitt als positiv.

73. Satz vom Quadrat der Mittellinie.

Im Dreieck ist $a^2 + b^2 = 2m^2 + \frac{1}{2}c^2$.

Beweis: Wende die Verallgemeinerung des pythagoreischen Lehrsatzes auf die beiden Teildreiecke an; dann ergiebt sich durch Addition die Behauptung.

74. Satz von der Winkelhalbierenden.

Im Dreieck ist $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$.

Beweis: Denkt man von W auf a und b Senkrechte gefällt, so ist $\frac{\triangle BCW}{\triangle ACW} = \frac{a}{b}$. Es ist aber auch $\frac{\triangle BWC}{\triangle AWC} = \frac{u}{v}$, folglich $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$.

---

1) πoϑαγόρειος, pythagoreisch.

75. Satz von der Halbierungslinie des Aussenwinkels.

Im Dreieck ist $\frac{a}{b} = \frac{u'}{v'}$.

Beweis: Fälle von W′ die Senkrechten auf a und b; dann ist $\frac{\triangle BCW'}{\triangle ACW'} = \frac{a}{b}$; es ist aber auch $\frac{\triangle BW'C}{\triangle AW'C} = \frac{u'}{v'}$, folglich $\frac{a}{b} = \frac{u'}{v'}$.

76a. Definition der harmonischen Teilung.

Eine Strecke heisst harmonisch geteilt, wenn sie innerlich und äusserlich in demselben Verhältnis geteilt ist.

76b. Satz des Apollonius.

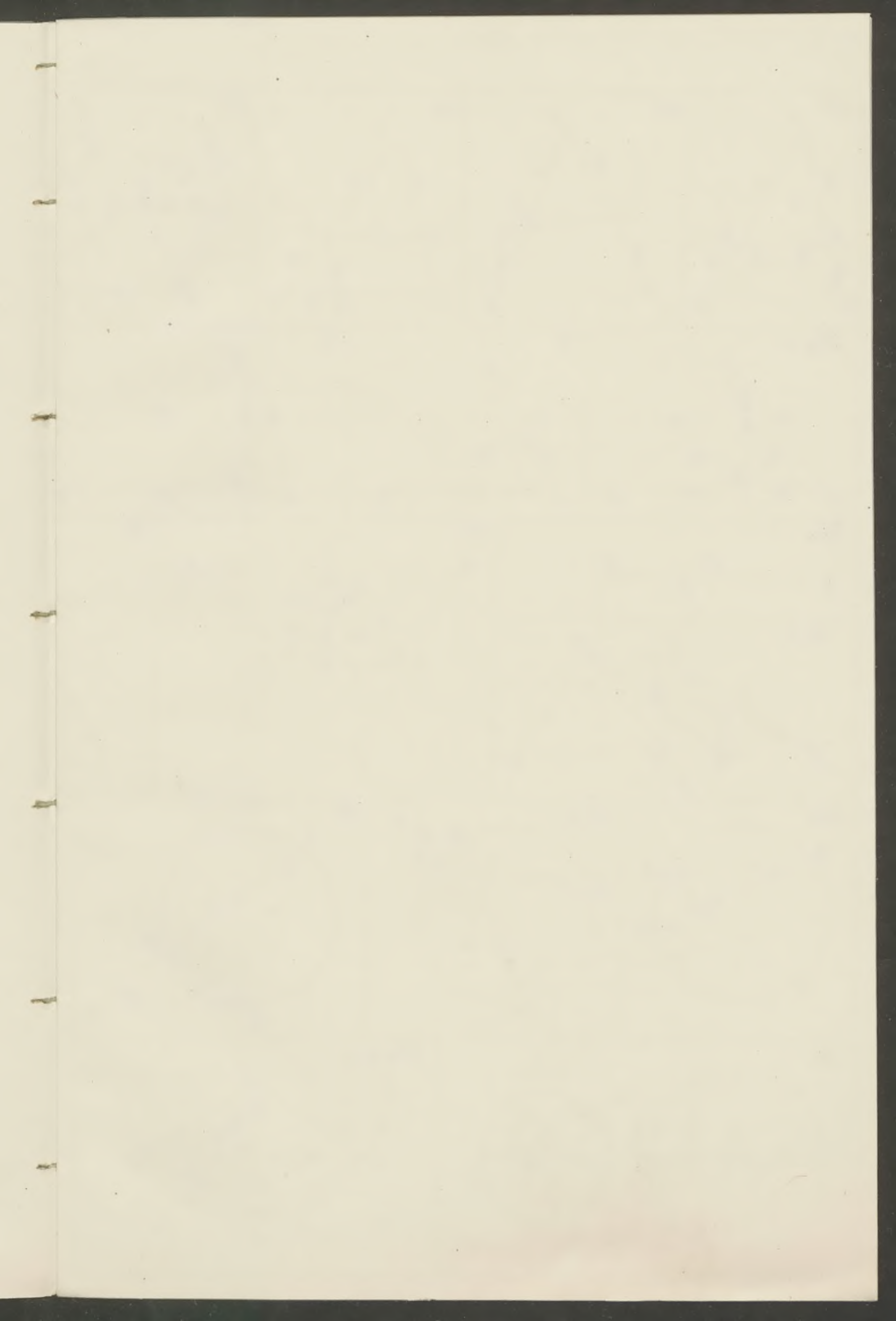
Wenn am Dreieck $\angle WXW' = R$, so ist $\frac{BX}{AX} = \frac{a}{b}$.

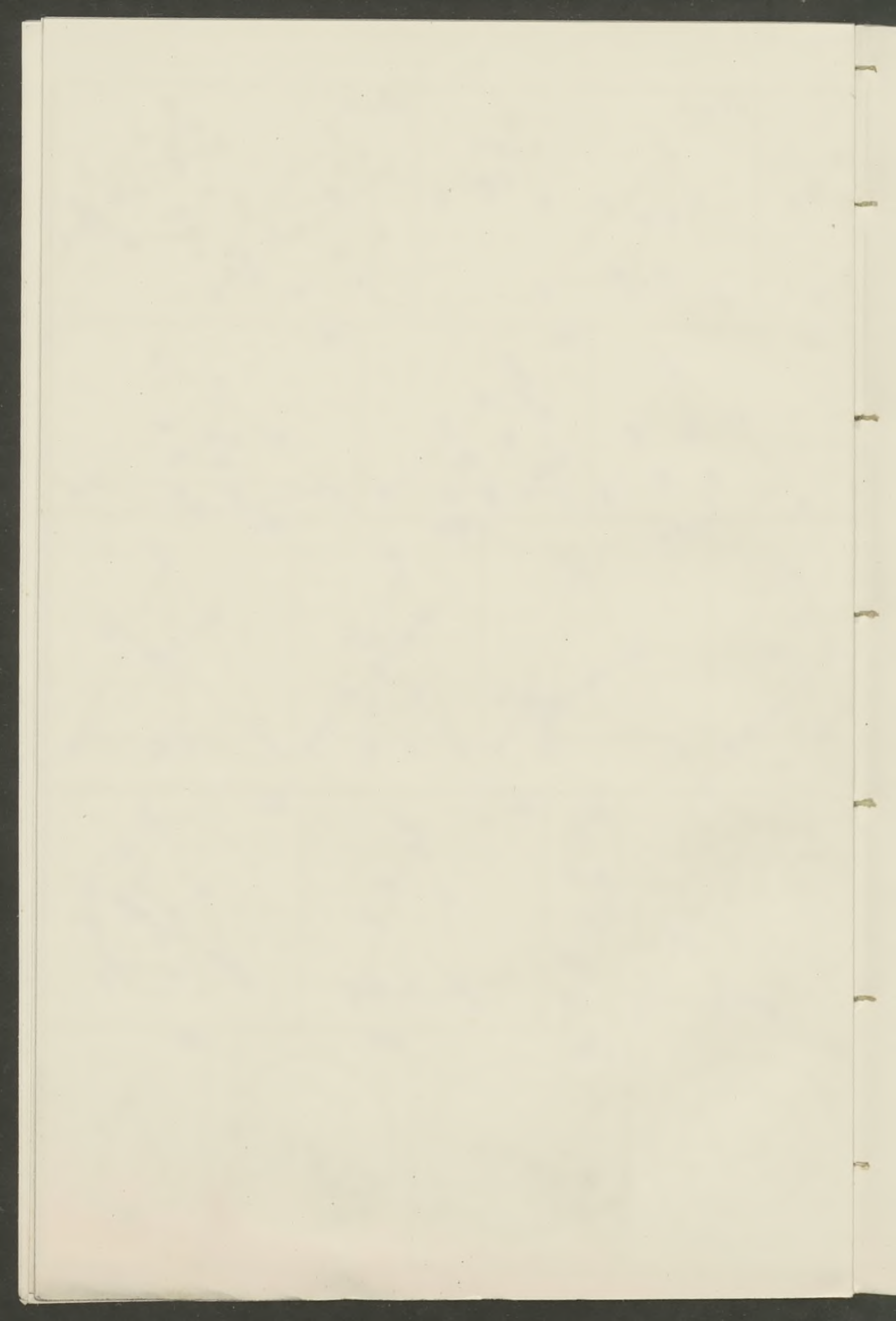
Beweis: Ziehe durch W eine Parallele zu W′X, verwende die Ähnlichkeit zweier Dreieckspaare und den Umstand, dass AB durch W und W′ harmonisch geteilt ist zum Nachweis dafür, dass DW = EW. Dann folgt die Behauptung aus dem Satz von der Winkelhalbierenden.

77. Satz von den drei Höhen.

Im Dreick schneiden sich h_a, h_b, h_c in einem Punkte, und es ist $h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

Beweis: Legt man durch die Spitzen des Dreiecks Parallelen zu den Gegenseiten, so entstehen drei Paare von Parallelogrammen, und die Seiten des neu entstandenen Dreiecks werden durch die Ecken des ursprünglichen halbiert. Dann folgt die erste Behauptung aus dem Satz von den drei Mittelsenkrechten des Dreiecks. — Drückt man ferner den Inhalt des Dreiecks dreimal aus und setzt die sich ergebende Produktengleichung in eine fortlaufende Proportion um, so ergiebt sich die zweite Behauptung.





78. Satz von den drei Mittellinien.

Im Dreieck schneiden sich m_a, m_b, m_c in einem Punkt so, dass jede Mittellinie dreimal so gross ist, wie ihr unterer Abschnitt.[1])

Beweis: Zwei Mittellinien m_a und m_b schneiden sich in einem Punkte S. Nun ist $\triangle ABS = \triangle CBS$, da sie gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben. Aus demselben Grunde ist $\triangle BAS = \triangle CAS$, also $\triangle ABS = \triangle CBS = \triangle ACS = \frac{1}{3}\Delta$. Da nun $\triangle ACS$ und $\triangle BCS$ gleichen Inhalt und gleiche Grundlinie haben, so müssen sie auch gleiche Höhe haben. Daraus folgt, dass CS die Seite c halbiert. Nunmehr muss $\triangle ASM_c = \frac{1}{3} \triangle ACM_c$ sein, also $SM_c = \frac{1}{3}m_c$, ebenso $SM_a = \frac{1}{3} m_a$ und $SM_b = \frac{1}{3} m_b$.

Bemerkung: Der Durchschnittspunkt der drei Mittellinien heisst „Schwerpunkt" des Dreiecks, weil die Fläche desselben um ihn gleichmässig verteilt ist.

79a, b. Satz des Ceva.

Wenn drei Transversalen[2]) eines Dreiecks, AT_a, BT_b, CT_c durch einen Punkt gehen, so ist

$$\frac{AT_c}{BT_c} \cdot \frac{BT_a}{CT_a} \cdot \frac{CT_b}{AT_b} = 1.$$

Beweis: Setzt man je zwei Dreiecke zwischen je einer Seite und dem Punkt X in Verhältniss und wendet die Ähnlichkeit dreier rechtwinkliger Dreieckspaare an, so ergiebt sich durch Multiplikation der drei resultierenden Proportionen die Behauptung.

79c. Umkehrung des Satzes von Ceva.

Schneiden drei Transversalen die drei Seiten — oder die Verlängerungen zweier Seiten und die dritte — in drei Punkten T_a, T_b, T_c so, dass

$\frac{AT_c}{BT_c} \cdot \frac{BT_a}{CT_a} \cdot \frac{CT_b}{AT_b} = 1$ ist, so gehen sie durch einen Punkt.

Beweis: Indirekt vermittelst des Hauptsatzes.

---

[1]) Der untere Abschnitt ist der nach der Seite, der obere ist der nach der Ecke zu liegende. [2]) transversus, quer durchschneidend.

Metrische Beziehungen am Kreise.

80. Satz von den sich schneidenden Sehnen.

Wenn die Sehnen AB und A_1B_1 sich in O schneiden, so ist $AO \cdot BO = A_1O \cdot B_1O$.

Beweis: Verbinde A mit B_1 und B mit A_1, dann folgt die Behauptung aus der Ähnlichkeit zweier Dreiecke.

81. Satz von der Tangente und Sekante.

Wenn die Sehne AB und eine Tangente in B_1 sich in O schneiden, so ist $\overline{B_1O}^2 = AO \cdot BO$.

Beweis: Verbinde B_1 mit A und B, dann folgt die Behauptung aus der Ähnlichkeit zweier Dreiecke.

82. Satz über stetige Teilung.

Wenn die Sehne CD und eine Tangente in B sich in A schneiden, wenn ferner $CD = AB$ und $AD = AE$ ist, so ist $AB \cdot EB = \overline{AE}^2$.

Beweis: Durch den Satz von der Tangente und Sekante vermittelst korrespondierender Subtraktion.

83. Definition der stetigen Teilung.

Eine Strecke a heisst stetig geteilt, wenn ein Teil x derselben die Gleichung erfüllt: $x^2 = a(a - x)$.

84. Satz vom Bestimmungsdreieck des regulären Zehnecks.

Wenn im Dreieck $a = b$ und $c^2 = a\ (a - c)$, so ist $\gamma = \frac{2}{5}R$.

Beweis: Trägt man c auf a von C aus ab bis D, so ist $\triangle$ ACB $\sim$ $\triangle$ DAB, also $\triangle$ DAB gleichschenklig, somit auch $\triangle$ ADC gleichschenklig; folglich $\angle ADB = 2\gamma = \alpha = \beta$. Daraus folgt $\gamma = \frac{2}{5}R = \frac{4R}{10}$.

85. Der Ptolemäische Lehrsatz.

Im Sehnenviereck ist $ef = ac + bd$.

Beweis: Man trage $\angle$ (bf) an a in B an; der freie Schenkel teile e in e_1 und e_2; man beweise dann die Ähnlichkeit zweier Dreieckspaare. Zwei sich so ergebende Proportionen setze man nach dem Produktensatz um. Durch Addition ergiebt sich dann die Behauptung.

86. Satz über Umfang und Inhalt des Kreises.

1) $u = 2r\pi$. 2) $K = r^2\pi$.

Beweis: Zwei Kreise können als reguläre Polygone mit gleicher, aber unendlich grosser Seitenanzahl, somit als ähnliche Figuren angesehen werden. Bezeichnen also u und u_1 ihre Umfänge, r und r_1 ihre Radien, so ist $\frac{u}{u_1} = \frac{2r}{2r_1}$ oder $\frac{u}{2r} = \frac{u_1}{2r_1}$; d. h. der Quotient aus Umfang und Durchmesser hat für alle Kreise denselben Wert. Derselbe wird mit π bezeichnet, demgemäss ist 1) $u = 2r\pi$.

Der Inhalt des Kreises ist nun $K = \frac{1}{2}u\varrho = \frac{1}{2}ur$, so dass durch 1) folgt: 2) $K = r^2\pi$.

Zur Berechnung von π können folgende Betrachtungen dienen:

87a. Satz über den kleinen Radius des regulären 2n-Ecks.

$\varrho_{2n} = \sqrt{\frac{1}{2}r\ (r + \varrho_n)}$.

Beweis: Bezeichnen s_n die Seite, ϱ_n den kleinen Radius, u_n den Umfang, P_n den Inhalt des einem Kreise mit dem Radius r eingeschriebenen regulären n-Ecks, so ist nach dem Satz von der Hypotenusenhöhe

$$\varrho^2_{2n} = r\ [\varrho_n + \tfrac{1}{2}\ (r - \varrho_n)]$$

$$= \frac{r}{2}\ (r + \varrho_n), \text{ also}$$

$$\varrho_{2n} = \sqrt{\frac{r}{2}\ (r + \varrho_n)}$$

87b. Satz über den Inhalt des regulären n-Ecks.

$$P_{2n} = \frac{r\,P_n}{\varrho_n}.$$

Beweis: Es ist $P_n = n \cdot \frac{1}{2}\, s_n\, \varrho_n$

$$P_{2n} = n \cdot [\tfrac{1}{2}\, s_n\, \varrho_n + \tfrac{1}{2} s_n\, (r - \varrho_n)]$$

$$= n \cdot \tfrac{1}{2}\, r\, s_n, \text{ also}$$

$$\frac{P_n}{P_{2n}} = \frac{\varrho_n}{r} \text{ oder}$$

$$P_{2n} = \frac{r \cdot P_n}{\varrho_n}$$

87c. Satz über die Ludolfsche Zahl.

$$\pi = \frac{3}{|\varrho_{12}| \cdot |\varrho_{24}| \cdot |\varrho_{48}| \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot}$$ [1])

Beweis: Für $|r| = 1$ ergiebt sich aus den vorigen Sätzen, wenn man vom regulären Sechseck ausgeht:

$$\frac{|P_6|}{|P_{12}|} = |\varrho_6|, \text{ wo } |\varrho_6| = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\frac{|P_{12}|}{|P_{24}|} = |\varrho_{12}|, \text{ wo } |\varrho_{12}| = \sqrt{\tfrac{1}{2}\,(1 + |\varrho_6|)}.$$

$$\frac{|P_{24}|}{|P_{48}|} = |\varrho_{24}|, \text{ wo } |\varrho_{24}| = \sqrt{\tfrac{1}{2}\,(1 + |\varrho_{12}|)}.$$

$$\frac{|P_{48}|}{|P_{96}|} = |\varrho_{48}|, \text{ wo } |\varrho_{48}| = \sqrt{\tfrac{1}{2}\,(1 + |\varrho_{24}|)}$$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Durch Multiplikation dieser Gleichungen ergiebt sich

$$\frac{|P_6|}{|P_\infty|} = |\varrho_6| \cdot |\varrho_{12}| \cdot |\varrho_{24}| \cdot |\varrho_{48}| \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$|P_\infty| = \frac{|P_6|}{|\varrho_6| \cdot |\varrho_{12}| \cdot |\varrho_{24}| \cdot |\varrho_{48}| \cdot \cdot \cdot \cdot}$$

Da aber $\frac{|P_6|}{|\varrho_6|} = 3$, und da $|P_\infty|$ als Masszahl vom Inhalt des Kreises den Wert π hat, so ergiebt sich

$$\pi = \frac{3}{|\varrho_{12}| \cdot |\varrho_{24}| \cdot |\varrho_{48}| \cdot \cdot \cdot \cdot}$$

88. Satz über den Inhalt eines Kreisringes.

Der Inhalt eines Kreisringes, der zwischen zwei konzentrischen Kreisen von den Radien r und ϱ liegt, ist $(r^2 - \varrho^2)\,\pi$.

Beweis: Durch die Formel vom Inhalt des Kreises.

---

[1]) Das Zeichen „| |“ bedeutet wieder: „Masszahl von“.

89. Satz über Bogen und Centriwinkel.

Wenn a und b Bogen desselben Kreises, α und β ihre Centriwinkel sind, so ist $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Beweis: 1) α und β sind kommensurabel.

Durch Abtragen des gemeinschaftlichen Masses werden nach dem Satz von den gleichen Centriwinkeln auch die Bogen in lauter gleiche Teile geteilt. Die Division der sich ergebenden Gleichungen führt dann zur Behauptung.

2) α und β sind inkommensurabel.

Indirekt: Angenommen, die Behauptung wäre falsch, so könnte sie durch Veränderung eines Gliedes richtig gestellt werden, etwa in $\frac{a}{b} = \frac{\alpha + \delta}{\beta}$. Es muss dann ein Mass von β geben, welches kleiner ist als δ. Trägt man dies auf α ab, so oft es geht, so muss ein Teilschenkel zwischen die Schenkel von δ fallen, so dass ein neuer Centriwinkel α_1 und ein dazu gehöriger Bogen a_1 entsteht. Nunmehr ergiebt Teil 1) einen Widerspruch gegen die Annahme.

Folgerung. Wählt man für b die Peripherie des Kreises, so ergiebt sich $a = \frac{\alpha}{180^0} r\pi$.

90. Satz über den Inhalt des Kreissektors.

$s = \frac{1}{2} ar = \frac{\alpha}{360^0} r^2\pi.$

Beweis: Durch Zerlegung des Sektors in unendlich viele, unendlich schmale Dreiecke und durch die Folgerung des vorigen Satzes.

